

NO

DATE 11/03/17.

ΟΡΘΟΓΩΝΟΝΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\longleftrightarrow$ 1-1, επί, οντιστοιχία
 Εξωμνηστικές Ισομετρίες
 του $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$
 $\uparrow$
 συνδυάζει in
 κανονικό ε.γ. γινόμενο.

Πρόταση: Έστω $V = \mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle$, με συνδυάζει
 εξωτερικό γινόμενο και $e = (e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1))$
 η κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$.

Θέτουμε $A = \{ T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \mid T \text{ γραμμική ισομετρία} \}$
 $O(n, \mathbb{R}) = \{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A \text{ ορθογώνιος} \}$

Ορίζουμε $\phi: A \rightarrow O(n, \mathbb{R})$, με $\phi(T) = [T]_e^e$
 τότε ϕ είναι ορισμένη, 1-1, και επί.
 (και η συνδυάζει στο A , οντιστοιχεί σε
 παράλληλο γινόμενο)

Σχόλιο: Κάθε ορισμένη, γραμ. T γραμμ. ισομετρία $\Rightarrow [T]_e^e$ ορθογώνιος

Πιο γενικά ισχύει:

Πρόταση: Έστω $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ κ.ε.γ με $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ γινόμενο και e ορθοκανονική βάση του V . Θέτουμε:

$$A = \{ T: V \rightarrow V \mid T \text{ γραμμ. ισομετρία} \}$$

$$O(n, \mathbb{R}) = \{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A \text{ ορθογώνιος} \}$$

Ορίζεται $\phi : A \rightarrow O(n, \mathbb{R})$ με $\phi(T) = [T]_{\mathcal{B}}$
 Τότε ϕ είναι ορισμένη, 1-1 και επί.
 (για n γενόμε στο A , αντιστοιχεί στον
 παλιό πυλώνα).

ΑΝΑΛΥΣΗ (θεώρημα Euler), ΧΑΤΑΤΑΞΗ ΟΡΘΟΓ.
 ΠΥΛΩΝ $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

4 ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ:

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1: $A = I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ιδιοτιμή
 στο $\mathbb{R} \rightarrow 1$. Με ολίσθηση πολλαπλασιασμού $\rightarrow 3$
 και άρα πολλαπλασιασμού $\rightarrow 3$.

ΔΙΑΓΩΝΙΟΣ ΕΝΤΟΣ ΤΟΥ $\mathbb{R}$ (αφού A διαγωνιστός)
 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΤΙΜΟΤΑ ΔΕΝ ΚΙΝΗΤΑΙ.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2: $A = I_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, Ιδιοτιμή

στο $\mathbb{R} \rightarrow -1$. Με ολίσθηση πολλαπλασιασμού $\rightarrow 3$
 και άρα πολλαπλασιασμού $\rightarrow 3$
 ΔΙΑΓΩΝΙΟΣ ΕΝΤΟΣ ΤΟΥ $\mathbb{R}$.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ: ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΙ ΣΤΗΝ ΠΡΟΩΠΗ

ΟΠΕΙΣΜΟΝ $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (-x, -y, -z)$

που είναι ο υποτεριγμένος ως προς την
 αρχή των αξόνων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3 : $\det A = 1$ και $A \neq I_3$

Θέτουμε $\omega = \ker A$, $L = \omega^\perp$, δηλαδή

L είναι ορθόγωνιο συμπλανάριο στο $\mathbb{R}^3$
 ως ευθεία εφαπ. διότι το ω .

Έχουμε $\dim_{\mathbb{R}} \omega = 1$, $\dim_{\mathbb{R}} L = 2$

Υπάρχει (μοναδικό) $\phi \in (0, \pi]$ ώστε:

$$1 + 2\cos\phi = \text{tr} A.$$

Ο πίνακας A περιγράφει περιστροφή
 ως άξονα περιστροφής ω , στα επίπεδα
 κάθετα στο ω (δηλ. περιστρέφει στο
 επίπεδο L) ως προς γωνία περιστροφής
 ϕ .

Έστω e_1 ορθονόρμιση βάση του ω και
 e_2, e_3 ορθονόρμιση βάση του L . Θέτουμε
 $P = [e_1 | e_2 | e_3]$, τότε (για μετα-
 στροφή ευκλείδειου των e_2, e_3)

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε στο $\mathbb{C}$: Αν $\phi \in (0, \pi)$:

$$1 \quad \text{Αντ. του } 1$$

$$\cos\phi + i\sin\phi \gg \gg 1$$

$$\cos\phi - i\sin\phi \gg \gg 1$$

$$\text{Av } \phi = \pi, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΤΟ $\mathbb{C}$:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \text{ΑΝΤ. ΠΟΛΛΑΤΗ.} & 1 \\ -1 & \gg \gg & 0_2. \end{array}$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 4:

$$\det A = -1 \neq 0 \quad \text{υπάρχει } A \neq -I_3.$$

Θετουμε $\omega = \text{Ker}(A - I)$, $L = \omega^\perp$. Τότε $\exists$ (μοναδική) $\phi \in [0, \pi)$ ώστε: $-1 + 2\cos\phi = \text{tr} A$.

$$\text{Τότε } \dim_{\mathbb{R}} \omega = 1, \dim_{\mathbb{R}} L = 2.$$

Τότε A θεωρείται πρώτα, περιστροφή κατά ϕ γύρω από το άξονα περιστροφής ω στο επίπεδο $\omega^\perp$ στο ω , δηλ. σε επίπεδα παραλλήλα με το επίπεδο L) και μετά υστέρησης ως προς το επίπεδο L .

Έστω e_1 ορθονομική βάση του ω .

και e_2, e_3 ορθονομική βάση του L .

Θετουμε $P = [e_1 | e_2 | e_3]$. Τότε (για να βρούμε

την έκφραση των e_2, e_3):

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΤΟ $\mathbb{C}$:

$\rightarrow \text{Av } \phi \in (0, \pi)$:

ΙΔΙΟΤΗΤΗ	ΑΝΤ. ΠΟΛΛ.	ΓΕΩΜ. ΠΟΛΛ.
-1	1	1
$\cos\phi + i\sin\phi$	1	1
$\cos\phi - i\sin\phi$	1	1

NO

DATE

~ 1 Αν $\phi=0$, τότε οι ιδιοτιμές στο $\mathbb{R} \rightarrow -1$,
 για $\phi \neq 0$ & $\phi \neq \pi$ αντιστοιχούν ~ 1
 και A διαγωνισμός / $\mathbb{R} \sim 1$ με $\phi \neq 0$ & $\phi \neq \pi$
 τότε ~ 9 .

Φωτιάδης 6, Αδ. 4.

Δείτε ότι ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

παριστάνει στροφές γύρω ϕ περί
 ενός άξονα Σ , περνάει από το σημείο
 $O = (0, 0, 0)$. Στην συνέχεια να προσδιοριστεί
 ο άξονας Σ και την γωνία ϕ .

Λύση

Βήμα 1ο: Α ορθογώνιος πίνακας

A^T

$$A^T A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

Από την Θ. Euler ότι $\det A = 1$ και $A \neq I_3$
 ο A παριστάνει στροφές γύρω κάποια
 γωνία ϕ , ως προς κάποιο άξονα Σ που
 περνά από το O .

Ηχοτοξιοξος ϕ : $1 + 9(\cos \phi) = \text{Tr } A = -1 \Rightarrow$
 $\cos \phi = -1 \Rightarrow \phi = \pi$.

Ηχοτοξιοξος τοξ Σ : Σ εραξος $\Sigma = V_A(1)$

Αρα: $(A - \Sigma I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \\ -2z = 0 \end{cases}$$

Αρα $\Sigma = V_A(1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} = L \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

ολλοξιοξ 6, Αοκ. 1

Σολοξοξ. τοξ πινολοξ:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & * & * \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & * & * \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}.$$

ωοτε το εινολ οροξιοξοξ.

Λοο

Σ εραξος οο Α οροξιοξοξ $\Leftrightarrow$ οο οοξοξ τοξ Α εινολ οοο τοξ $\mathbb{R}^{4 \times 4}$ οο το οοοοοξ οο. οο

NO

DATE

Aufgabe A rms 1000ms

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & x & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & y & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{3}{\sqrt{14}} & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Prober:

$$\begin{cases} \langle 1^m \text{ Gram}, 3^m \text{ Gram} \rangle = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{z}{\sqrt{3}} = 0 \Leftrightarrow x + y + z = 0 \\ \langle 2^m \text{ Gram}, 3^m \text{ Gram} \rangle = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{14}} + \frac{2y}{\sqrt{14}} - \frac{3z}{\sqrt{14}} = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

(2)

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

Ne nur nullen To GIBT 2 Eigenvektoren

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5z \\ 4z \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\}$$

Prober: $\langle 3^m \text{ Gram}, 3^m \text{ Gram} \rangle = 1 \mathbb{R}$
 $\Leftrightarrow (-5z)^2 + (4z)^2 + z^2 = 1 \Leftrightarrow 49z^2 = 1$

Ergebnis: $z = \frac{1}{\sqrt{49}}$

Zweiter:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & -\frac{5}{\sqrt{49}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{4}{\sqrt{49}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{49}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ορισμός: Έστω $(V, \angle)$, $(W, \angle')$, ϑ
 Ευκλείδειοι χώροι. Ο V και W λέγονται
 ισομετρικοί αν $\exists T: V \rightarrow W$ γραμμ. ισομετρία
 δηλ T : 1-1, επί, γραμμ. και
 $\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in V$.

Πρόταση: Έστω $(V, \angle)$, $(W, \angle')$ ϑ (κεν)
 κεντρ. διαστέγματος. Τ.Α.Ε.Ι:

i) V, W ισομετρικοί.

ii) $\dim V = \dim W$.

(Μόλις m από τον ii) $\Rightarrow$ i) θα μας
 δώσει αλγόριθμο κατασκευής γραμμ. ισομετρίας

Απόδ

i) $\Rightarrow$ ii) Έστω $T: V \rightarrow W$ γραμμ. ισομετρία.

Τότε η T : 1-1, επί και γραμμ.

Από το Γραμμ. Αλγ. 1, T ισομορφισμός
 διαν. χώρων. άρα $\dim V = \dim W$.

ii) $\Rightarrow$ i) Θετουμε $n = \dim V = \dim W$.

Από θ. Gram-Schmidt $\exists$ ορθ. Βάση

$e = (e_1, \dots, e_n)$ του V και ορθ. Βάση

$g = (g_1, \dots, g_n)$ του W .

Από Γραμμ. Αλγ. 1 $\exists$ (μοναδιαία) γραμμ. αντιστ.

$T: V \rightarrow W$ με $T(e_i) = g_i$, για $i = 1, 2, \dots, n$.

(Μόλις $T(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n) =$

$= \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_n g_n$ για $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

16. Lemma: T is an isomorphism.

Proof.

T is linear: $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \in \ker T \Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i g_i = 0_w \stackrel{\text{Gram}}{\Rightarrow} \lambda_i = 0, \forall i.$$

T is surjective: $\forall w \in W$. As $\{g_i\}$ is a basis of W

$\exists \lambda_i \in \mathbb{R}$ s.t. $w = \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_n g_n$. Now

$$w = T(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n)$$

Let $w = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ and $v = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n$.

$$\langle T(w), T(v) \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i, \sum_{j=1}^n \mu_j g_j \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \mu_j \langle g_i, g_j \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i$$

$$\text{Moreover } \langle w, v \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^n \mu_j e_j \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \mu_j \langle e_i, e_j \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \mu_j$$

$$= \langle T(w), T(v) \rangle$$

As T is an isomorphism,

Αλγορίθμος: (γνώσ. προβ. ιδιοτερία).
 Έστω $(v, \ell v)$, $(w, \ell w)$ δίδ $(x, \ell x)$ γινόμεν.
 ελέγξτε διαδοχικά, θα υπολογιστούν
 γραμμικά ιδιοτερία $T: v \rightarrow w$.

Βήμα 1ο: Βρίσκουμε από βάση v
 και g του w

Βήμα 2ο: Ορίζουμε $T: v \rightarrow w$ ως
 $T(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \dots + \lambda_n g_n$
 τότε m T γραμμ. ιδιοτερία.

π.χ.

Δείτε ότι ο πίνακας: $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2\sqrt{3}} \\ \frac{3}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ $\in \mathbb{R}^{2 \times 2}$
 είναι ορθογώνιος και
 παριστάνει ορθογώνια μεταστροφή (συνιστάει)
 ως προς άξονα, του οποίου και και βρείτε.

Λύση

Βήμα 1ο: Α ορθογώνιος.

$$A^T A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2\sqrt{3}} \\ \frac{3}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2\sqrt{3}} \\ \frac{3}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2\sqrt{3}} \frac{3}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{4} - \frac{9}{14} = -1$$

Από 0 Α παριστάνει ορθογώνια μεταστροφή και
 προς άξονα $w = VA(v)$

NO

DATE

11. Find the eigenvectors of A ($\lambda = 0$ is the only eigenvalue)

$$(\lambda - I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{3}{2\sqrt{3}} \\ \frac{3}{2\sqrt{3}} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{9}x + \frac{3}{2\sqrt{3}}y = 0 \\ \frac{3}{2\sqrt{3}}x - \frac{3}{2}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{9}x + \frac{3}{2\sqrt{3}}y = 0 \\ x = \frac{3}{\sqrt{3}}y \end{cases}$$

$$\text{Ans } W = V_A(\lambda) = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{3}}y \\ y \end{bmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\}$$